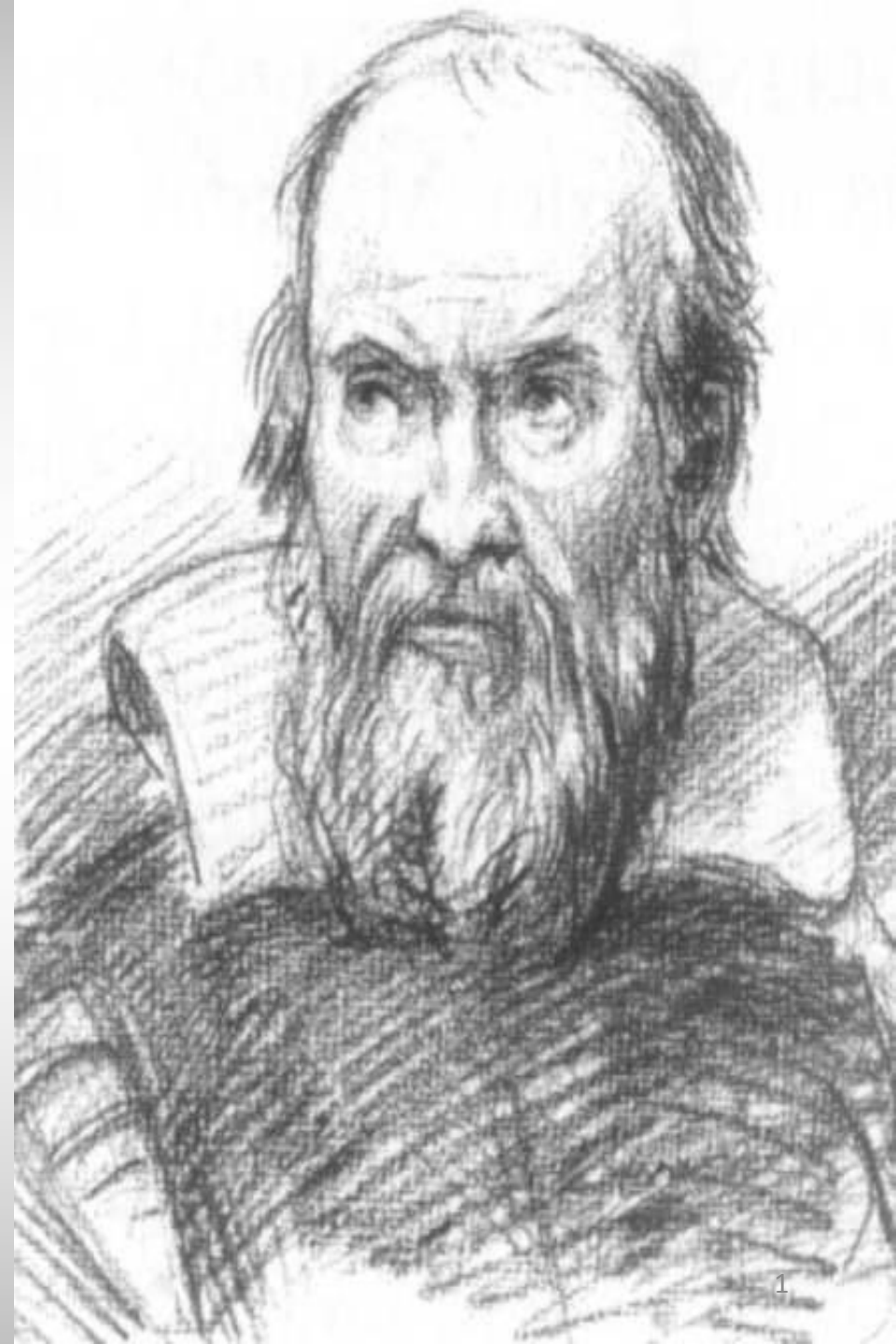


# Galileu E O efeito escala



- **A Semelhança Física no Movimento Pendular. (Protótipo X Modelo)**
- **A Resistência dos Corpos Sólidos**
- **O Tamanho Limite das Estruturas**



# Motivação

Quando o assunto é Galileu, logo nos lembramos de suas descobertas utilizando o telescópio e experimentos envolvendo a queda dos corpos. Esse trabalho é uma oportunidade de explorar outros temas, de grande relevância, também estudados por Galileu.

# Semelhança Física no Movimento Pendular Protótipo X Modelo

*Salviati: Quanto à proporção entre os tempos de oscilação de móveis suspenso por fios de diferentes comprimentos, **esses tempos estão entre si na mesma proporção que as raízes quadradas dos comprimentos desses fios**, o que quer dizer que os comprimentos estão entre si como os quadrados dos tempos...; do que se segue que os comprimentos dos fios estão entre si na proporção inversa dos quadrados os números de oscilações realizadas no mesmo tempo.*

*Sagredo: Se entendi bem, eu poderia, portanto, conhecer rapidamente o comprimento de uma corda pendente de qualquer altura, ainda que o ponto a que esta atada fosse invisível e somente se visse sua extremidade inferior. Com efeito, se amarro à parte inferior da corda em questão um peso bastante grande, ..., e se um amigo conta o número de suas oscilações enquanto ao mesmo tempo conto também as oscilações de outro móvel, atado a uma corda com o comprimento exato de um côvado, a partir dos números de oscilações desses pêndulos, efetuadas ao mesmo tempo, encontro o comprimento da corda: suponhamos, por exemplo, que no tempo em que um amigo tenha contado vinte oscilações da corda comprida, eu conto duzentos e quarenta da minha: ... direi que a corda comprida contém 57.600 unidades das quais a minha contém 400; ... direi que aquela corda tem 144 côvados de comprimento.*

***Salviati: V. As. Não teria errado nem mesmo de um palmo, especialmente se tomasse um grande número de oscilações.***

**O pêndulo constituído pela corda comprida com um corpo pesado amarrado à sua extremidade inferior é o “protótipo”, e o pequeno pêndulo, seu “modelo reduzido”.**

**Galileu percebeu, no caso das oscilações de pêndulos, que a escala do tempo é igual à raiz quadrada da escala geométrica, permitindo prever o comportamento do protótipo a partir de observações realizadas sobre o modelo**

No exemplo dado por Galileu a escala do tempo é determinada da seguinte forma: é igual ao inverso da relação entre os números de oscilações, isto é, ao inverso de 240/20, e, portanto 1:12. A escala geométrica, igual ao quadrado da escala do tempo, será 1:144, e o comprimento do pêndulo-protótipo, igual a 144 vezes o do pêndulo-modelo. Neste caso a condição de semelhança física corresponde à lei de Galileu segundo a qual o período de oscilação  $T$  de um pêndulo é proporcional à raiz quadrada do seu comprimento.

$$T \propto \sqrt{L}$$

Por que amarrar  
no modelo um  
peso bastante  
grande?



A recomendação de que o peso amarrado na extremidade inferior da corda deve ser bastante grande, tem como base as considerações feitas por Galileu sobre a **resistência oposta pelo meio que admite ser tanto maior quanto maior a superfície do corpo**, ao passo que seu peso é proporcional ao volume.

Comparando-se dois corpos geometricamente semelhantes e da mesma substância, a resistência oposta pelo meio a um movimento é, proporcionalmente à massa, muito maior no corpo menor. Para reduzir a perturbação causada pela resistência do meio é, portanto conveniente **“escolher as matérias e as formas que são menos sujeitas às resistências do meio, como acontece com os corpos muito pesados e redondos”**. [1]

*...Atribuo a causa à aspereza e porosidade que se encontram comumente, e quase necessariamente, nas superfícies dos corpos sólidos, e que, no curso do movimento, se chocam com o ar ou com outro meio ambiente. Não se pode duvidar que, na queda dos móveis, essas asperezas, chocando-se com o meio fluido, produzirão uma diminuição de velocidade tanto maior quanto maior for a superfície, como é o caso dos sólidos menores comparados aos maiores. Sendo, portanto evidente que, ao diminuir um sólido pesado, seu peso decrescerá proporcionalmente a seu volume, toda vez que o volume diminuir mais que a superfície (conservando máxima semelhança das formas), o peso diminuirá também mais que a superfície... E isso que exemplifiquei com os cubos acontece com todos os sólidos semelhantes entre si, cujos volumes estão em proporção sesquiáltera (potência  $3/2$ ) com suas superfícies, pois, se as superfícies são proporcionais ao quadrado das linhas e os sólidos são proporcionais ao cubo destas,... os sólidos estão numa proporção sesquiáltera a superfície.*

O que Galileu mostrou aqui é que a relação entre o peso e a resistência do meio não se mantêm constante: **a resistência do meio é, proporcionalmente ao peso, maior no corpo menor.** A semelhança física não é respeitada.



Esfera de raio R

$$Peso = P$$

$$Área = A$$



Esfera de raio 2R

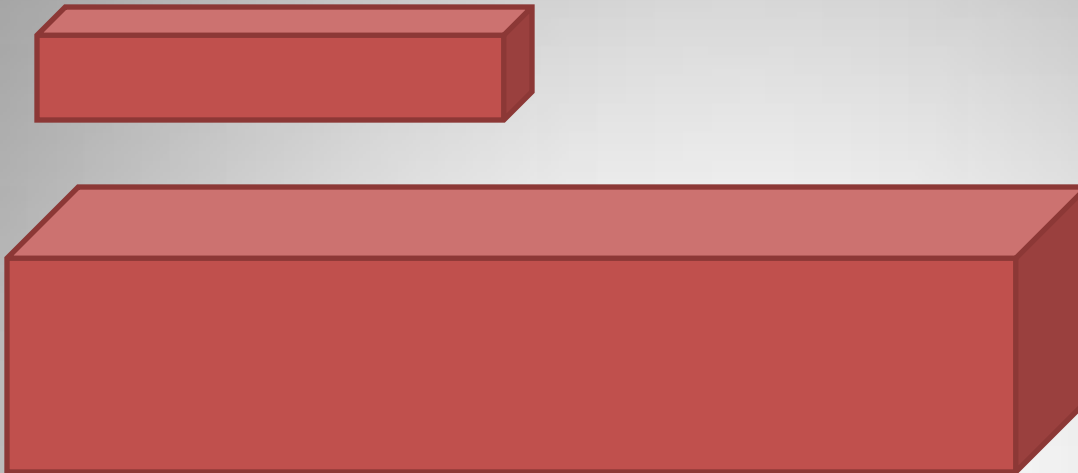
$$Peso = 8P$$

$$Área = 4A$$

# **A resistência dos corpos sólidos e o tamanho limite das estruturas**

**Galileu foi levado a investigar a resistência dos corpos sólidos por um problema de violação da semelhança física, verificado empiricamente na Arsenal de Veneza, ao se compararem os desempenhos de estruturas geometricamente semelhantes, construídas com o mesmo material, mas em escalas diferentes.[4-6]**

**Galileu fez vários experimentos comparando vigas geometricamente semelhantes deduzindo que desprezando seu próprio peso, as vigas são capazes de resistir às cargas externas proporcionais aos quadrados de uma de suas dimensões. No entanto o peso próprio, que é também uma carga atuando sobre a viga, é proporcional ao cubo dessa dimensão.**



**Fica assim demonstrado que, quando se aumentam todas as dimensões, conservando a semelhança geométrica, o peso próprio cresce em maior proporção que a capacidade de resistir às cargas aplicadas.**

**Galileu introduz ainda o conceito de tamanho limite de uma estrutura: “Entre os prismas e cilindros pesados, existe um e um só se encontra (sob o efeito de seu peso próprio) no estado limite entre a ruptura e a não-ruptura, de modo que todo sólido maior, incapaz de resistir ao seu próprio peso, quebrar-se-á, ao passo que todo sólido menos oporá alguma resistência a uma força destinada a quebrá-lo”**

*...Quem não vê que um cavalo que cai de uma altura de três ou quatro côvados (1,5, a 2 metros) quebrará os ossos, ao passo que um cão, que cai da mesma altura, e um gato de uma altura de oito ou dez côvados (4 a 5 metros), não sofrem nenhum mal? Quem não vê que as crianças saem ilesas de quedas, ao passo que os velhos quebram as pernas e a cabeça? **Do mesmo modo que os animais menores são proporcionalmente mais fortes e vigorosos que os maiores, também as plantas menores se sustentam melhor... um carvalho de duzentos côvados de altura (100 metros) não poderia sustentar seus ramos estendidos, como o faz um de média grandeza: ...a natureza não poderia produzir um cavalo equivalente em grandeza a vinte cavalos, nem um gigante dez vezes mais alto que um homem, a não ser milagrosamente e alterando muito as proporções dos ossos, que deveriam ser simetricamente muito maiores ... Assim, acredito que um pequeno cão ia ser capaz de carregar dois outros cães iguais a ele, mas não penso que um cavalo fosse capaz de carregar nem mesmo outro igual.***

*...do que até aqui foi demonstrado, se infere claramente a impossibilidade, não somente na arte, mas também na natureza, de aumentar seus mecanismos até tamanhos enormes, de modo que seria impossível construir navios, palácios os templos imensos, cujos remos, mastros, vigas e correntes de ferro, e, numa palavra, todas as suas partes construíssem um todo. Da mesma forma, a natureza não poderia fazer árvores do tamanho colossal, porque seus ramos, arqueados pelo próprio peso, acabariam por quebrar-se. Igualmente, seria impossível construir estruturas ósseas para os homens, cavalos ou outros animais, que pudessem subsistir e desempenhar suas próprias funções, pois para que tais animais tivessem alturas imensas, deveria ser utilizado um material mais duro ou resistente que o habitual. ... Disto é evidente que, quem quisesse manter, num imenso gigante, as proporções que tem os membros de um homem comum, deveria ou encontrar uma matéria mais dura e resistente para formar-lha os ossos, ou admitir que sua robusteza proporcionalmente muito mais fraca que nos homens de estatura pequena, pois, diversamente, aumentando demasiadamente sua altura, vê-lo-íamos, sobrecarregado pelo próprio peso, cair. Ao contrário, pode-se verificar que, ao diminuir os corpos, não se diminuem as forças na mesma proporção, mas, antes, que os membros tornam-se proporcionalmente mais resistentes.*

**Quando Galileu compara a capacidade de suportar cargas adicionais de cães e cavalos, é porque esses animais são aproximadamente semelhantes, como o são a maioria dos mamíferos terrestres de quatro patas. A estrutura dos dinossauros, por exemplo, é de um tipo completamente diferente da dos cães e cavalos, o que tornou possível sua existência com tamanhos muito maiores. A cauda e o pescoço desses animais, muito longos e pesados, aliviam os esforços na parte central do corpo.**

**Galileu Indica também, com muita clareza, como se poderia manter a semelhança física: aumentando a resistência mecânica ou diminuindo seu peso específico.**

$$\pi = \frac{\gamma \cdot l}{\sigma_K}$$

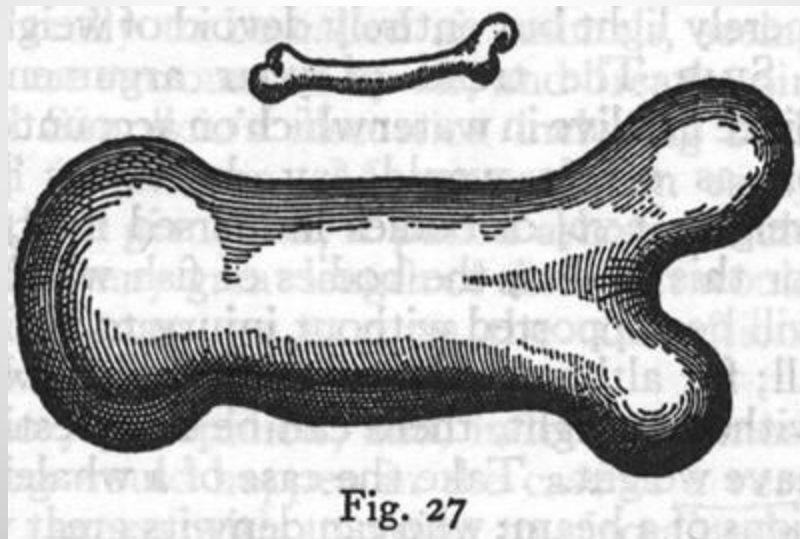
$\pi$  = número de Galileu

$l$  = dimensão representativa do corpo

$\gamma$  = peso específico do material

$\sigma_K$  = resistência mecânica do material

***Para ilustrar o que digo, desenhamos um osso, cujo comprimento foi aumentado apenas três vezes, e cuja espessura foi aumentada em tal proporção (nove vezes) que pudesse se realizar em um grande animal a mesma função que corresponderia a um osso melhor que de um animal também menor.***

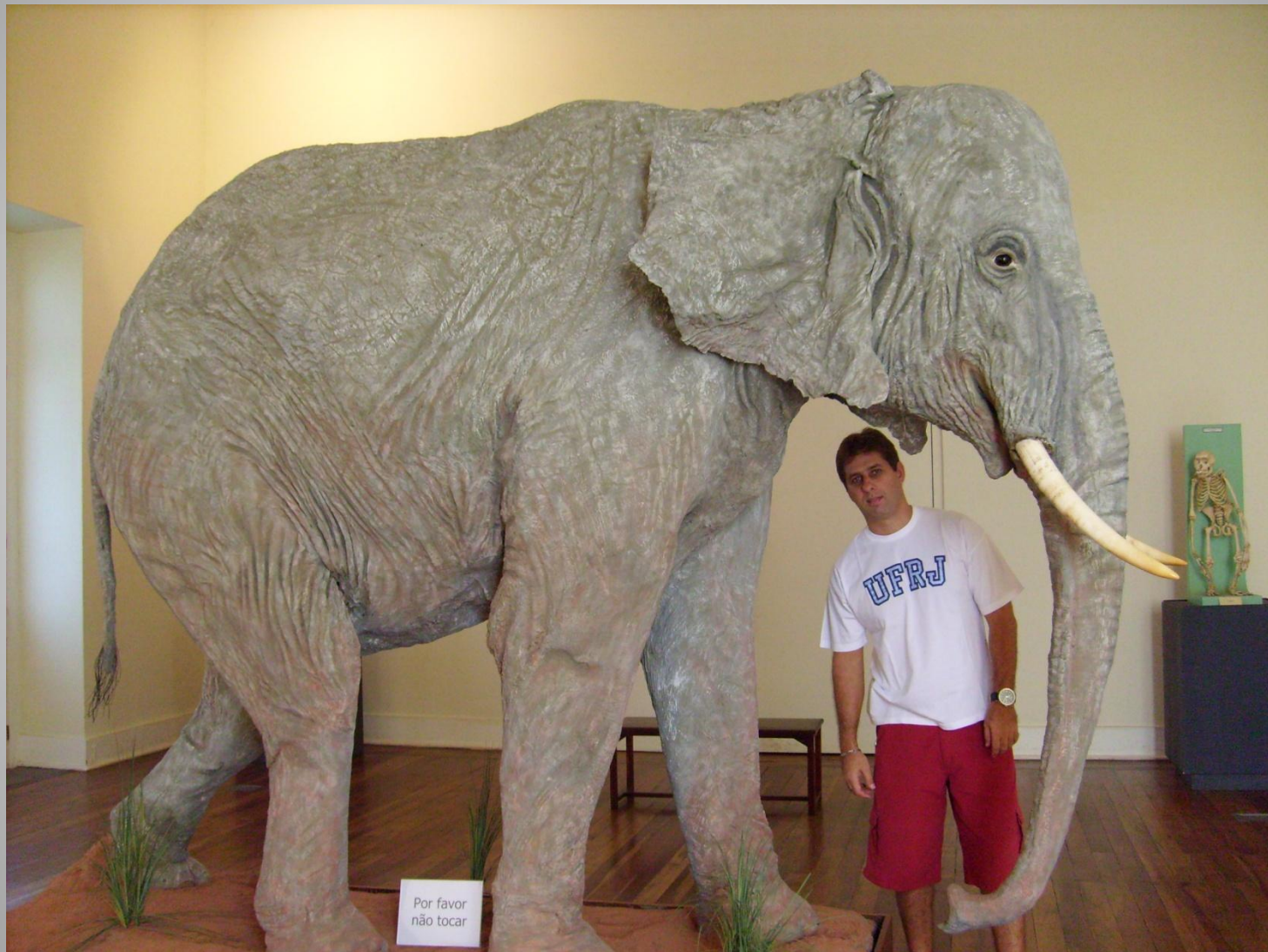


## COMPARANDO OSSOS DE DOIS DINOSSAUROS...



Esse tipo de distorção não se verifica nos mamíferos terrestres contemporâneos, que, do ponto de vista geométrico, são aproximadamente semelhantes. Por isso, comparados aos grandes, os animais pequenos como ratos, gatos e cães são mais capazes de suportar cargas adicionais, relativamente ao seu peso, assim como de correr e saltar. **Para os mamíferos terrestres contemporâneos, existe um tamanho limite, que é próximo do tamanho do elefante.** Os animais pré-históricos de estrutura assemelhada à dos mamíferos terrestres contemporâneos, como os mamutes, apresentavam a distorção sugerida por Galileu para os gigantes: **as dimensões transversais de seus ossos eram proporcionalmente muito maiores que, por exemplo, as dos cavalos atuais.** [6]

# Só para comparar...



## Algumas Aplicações no Ensino Médio

1) No filme "Armageddon", é mostrado um asteróide, em rota de colisão com a Terra. O diâmetro desse asteróide mede cerca de 1000km, mas, de acordo com vários astrônomos, os maiores asteróides com alguma probabilidade de colidir com a Terra têm um diâmetro de 10 km. São os chamados "exterminadores". Faça uma estimativa da razão entre as massas desses dois tipos de asteróides.

# Comparando dois Meteoritos

Santa Luzia



Pará de Minas

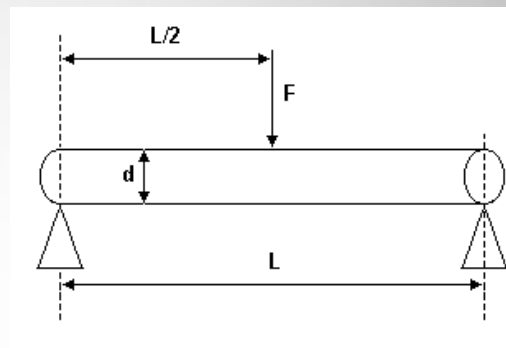


$$\sqrt[3]{\frac{\text{massa do maior}}{\text{massa do menor}}} = \sqrt[3]{\frac{1980}{112}} \approx 2,61$$

$$\frac{\text{Comprimento do maior}}{\text{Comprimento do menor}} = \frac{1,20}{0,45} \approx 2,67$$

2) (Unicamp) Além de suas contribuições fundamentais à Física, Galileu é considerado também o pai da Resistência dos Materiais, ciência muito usada em engenharia, que estuda o comportamento de materiais sob esforço. Galileu propôs empiricamente que uma viga cilíndrica de diâmetro  $d$  e comprimento (vão livre)  $L$ , apoiada nas extremidades, como na figura a seguir, rompe-se ao ser submetida a uma força vertical  $F$ , aplicada em seu centro, dada por

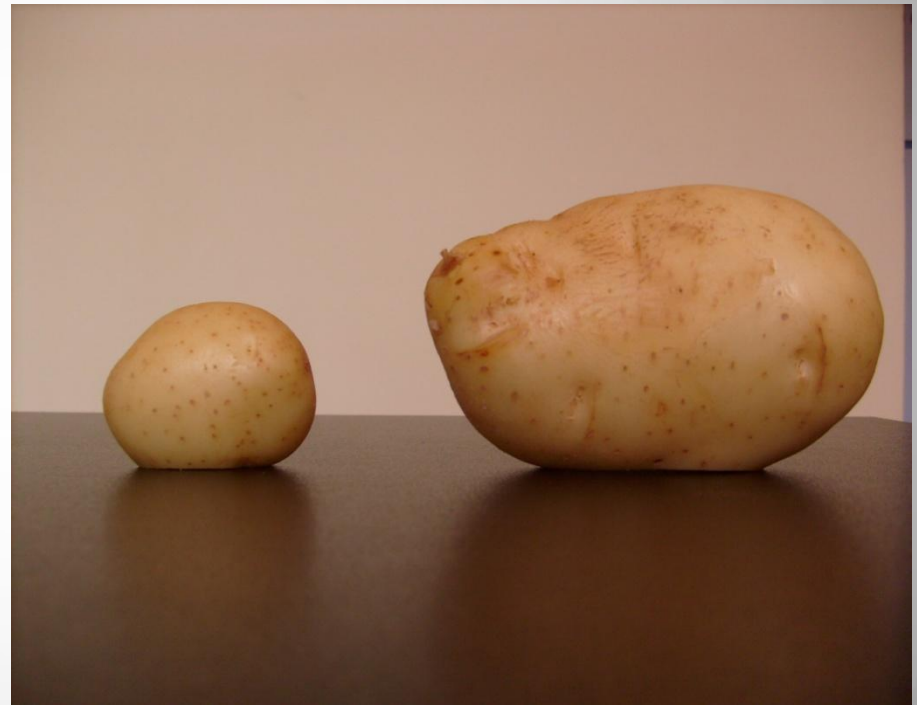
$$F = \sigma d^3/L$$



onde  $\sigma$  é a tensão de ruptura característica do material do qual a viga é feita. Seja  $\gamma$  o peso específico (peso por unidade de volume) do material da viga.

- Quais são as unidades de  $\sigma$  no Sistema Internacional de Unidades?
- Encontre a expressão para o peso total da viga em termos de  $\gamma$ ,  $d$  e  $L$ .
- Suponha que uma viga de diâmetro  $d_1$  se rompa sob a ação do próprio peso para um comprimento maior que  $L_1$ . Qual deve ser o diâmetro mínimo de uma viga feita do mesmo material com comprimento  $2L_1$  para que ela não se rompa pela ação de seu próprio peso?

### 3) E se Galileu fosse ao sacolão comprar batatas? Como as escolheria?



# Referências Bibliográficas

## Primária

[1] *Duas novas ciências*. Trad. de L. Mariconda & P. R. Mariconda. Rio de Janeiro/São Paulo: Mast/Nova Stella, 1988 [1638]

## Secundárias

[2] MARICONDA, P. R. “A contribuição filosófica de Galileu”.  
[http://www.scientiaestudia.org.br/associac/pablo.asp\(18:37](http://www.scientiaestudia.org.br/associac/pablo.asp(18:37), 21/06/09)

[3] COHEN, B. I. *O nascimento de uma nova física*. São Paulo: Edart, 1967

[4] CARNEIRO, Fernando L. L. B. *Galileo e a Teoria da Semelhança Física*. Seminário Internacional 350 Anos dos Discorsi Intorno a Due Nuove Scienze, de Galileu Galilei, São Paulo: Marco-Zero e COPPE/UFRJ, 1989

[5] MARICONDA, P. R.& VASCONCELOS, Julio. *Galileu e a nova Física*. São Paulo, Odysseus, 2006.

[6] MACLACHLAN, James. *Galileu Galilei, o primeiro Físico*. São Paulo: Companhia das letras, 2008.